

Elementy topologii kombinatorycznej

Michał Miśkiewicz
mimuw.edu.pl/~mis
m.miskiewicz@mimuw.edu.pl

28 maja 2022

1 Charakterystyka Eulera sfery

- Będziemy używać liter V, E, F na oznaczenie liczby wierzchołków, krawędzi i ścian (z ang. *vertices, edges, faces*) czy to wielościanu, czy to siatki złożonej z wielokątów.
- Łukiem *geodezyjnym* na sferze nazwiemy łuk koła wielkiego, czyli koła otrzymanego przez cięcie sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej środek.
- Przez *trójkąt geodezyjny* na sferze będziemy rozumieli obszar ograniczony przez trzy łuki geodezyjne.

Zadania

Zadanie 1.1. Policzyc liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian (V, E, F) dla pięciu wielościanów foremnych oraz ostrosłupa i graniastosłupa o n -kątnej podstawie. Następnie dla każdej z tych brył wyznaczyć charakterystykę Eulera $V - E + F$.

[W] **Zadanie 1.2.** Wykazać, że na sferze jednostkowej suma kątów wewnętrznych trójkąta geodezyjnego wynosi $\alpha + \beta + \gamma = \pi + A$, gdzie A jest polem trójkąta.

Wskazówka. Zastosować wzór włączeń i wyłączeń.

[W] **Zadanie 1.3.** Uzasadnić, że w siatce złożonej z trójkątów liczba krawędzi E i liczba ścian F spełnia równość $2E = 3F$.

Wskazówka. Wyznaczyć liczbę par (e, f) , w których e jest krawędzią ściany f .

[W] **Zadanie 1.4.** Wykazać, że jeśli na sferze jest dana siatka trójkątna złożona z trójkątów geodezyjnych, to spełniona jest równość $V - E + F = 2$.

Wskazówka. Na dwa różne sposoby zsumować wszystkie kąty wewnętrzne w tych trójkątach.

[W] **Zadanie 1.5.** Wywnioskować z poprzedniego zadania, że wzór $V - E + F = 2$ zachodzi dla dowolnego wielościanu wypukłego.

Wskazówka. Pociąć ściany na trójkąty, a następnie użyć rzutu środkowego, by przenieść uzyskaną siatkę na sferę.

Zadanie 1.6. Powiemy, że powierzchnia \mathcal{M} ma krzywiznę ograniczoną z dołu (z góry) przez K , jeśli dowolny trójkąt geodezyjny o kątach α, β, γ i polu A spełnia nierówność $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi + K \cdot A$ (odp. \leq). Sprawdzić, że sfera o promieniu R posiada krzywiznę $1/R$.

Zadanie 1.7. Wykazać, że jeśli powierzchnia \mathcal{M} ma krzywiznę ograniczoną z dołu przez K , to dla dowolnej siatki z trójkątów geodezyjnych zachodzi $V - E + F \geq \frac{K \cdot |\mathcal{M}|}{2\pi}$.

Wskazówka. Powtórzyć rozumowanie z Zadania 1.4.

2 Charakterystyka Eulera dowolnej powierzchni

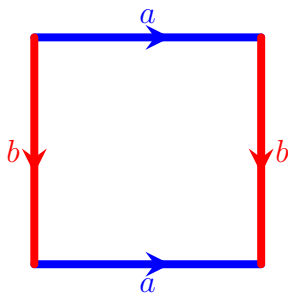
- Od teraz przez *powierzchnię* będziemy rozumieli powierzchnię wraz z triangulacją, czyli wyborem trójkątnej siatki na tej powierzchni.
- *Charakterystykę Eulera* $\chi_{\mathcal{M}}$ danej powierzchni \mathcal{M} definiujemy jako liczbę $V - E + F$. Można dowieść, że wielkość ta nie zależy od wybranej siatki, a jedynie od powierzchni, ale o tym później.

Zadania

Zadanie 2.1. Sumę spójną $\mathcal{M} \# \mathcal{N}$ dwóch powierzchni \mathcal{M}, \mathcal{N} tworzymy, wycinając po jednym trójkącie z każdej z nich, a następnie sklejjąc brzegi tych dwóch trójkątów. Wyprowadzić wzór na charakterystykę Eulera sumy spójnej:

$$\chi_{\mathcal{M} \# \mathcal{N}} = \chi_{\mathcal{M}} + \chi_{\mathcal{N}} - 2.$$

Zadanie 2.2.

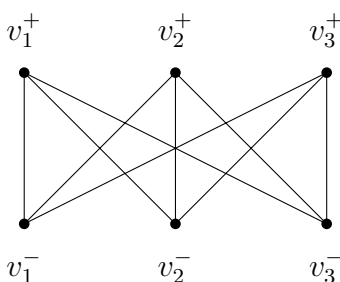


Torus (czyli kwadrat z brzegiem sklejonym jak na rysunku obok) bywa też nazywany preclm (ozn. P_1). Dwuprecla P_2 definiujemy jako sumę spójną dwóch precli $P_1 \# P_1$. Ogólnie, n -precla definiujemy jako sumę spójną n precli, lub też indukcyjnie wzorem $P_{n+1} := P_n \# P_1$ (czyli n -precla z doklejoną jeszcze jedną rączką). Wyznaczyć charakterystykę Eulera n -precla:

$$\chi_{P_n} = 2 - 2n.$$

Wskazówka. Pociąć torusa na trójkąty i wyliczyć χ_{P_1} , a potem skorzystać z Zadania 2.1.

Zadanie 2.3.



Rozważmy graf dwudzielny $K_{3,3}$ o (sześciu) wierzchołkach $v_1^+, v_2^+, v_3^+, v_1^-, v_2^-, v_3^-$ i (dziewięciu) krawędziach łączących każdy z v_1^+, v_2^+, v_3^+ z każdym z v_1^-, v_2^-, v_3^- . Wykazać, że takiego grafu nie da się narysować na sferze (czy też na płaszczyźnie) bez samoprzecięć.

Wskazówka. Uzasadnić, że w takiej siatce ściany byłyby co najmniej czworokątne, i naśladując Zadanie 1.3 wyprowadzić stąd nierówność $2E \geq 4F$.

Zadanie 2.4. Narysować graf dwudzielny $K_{3,3}$ na torusie, unikając samoprzecięć.

3 Homologie symplekcyjne – wprowadzenie

- Zbiory wierzchołków, krawędzi i ścian oznaczymy odpowiednio $\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$.
- Obraz funkcji $p: X \rightarrow Y$ to zbiór jej wartości

$$p(X) = \{y \in Y : p(x) = y \text{ dla pewnego } x \in X\},$$

a przeciwobraz punktu $y \in Y$ przy tej funkcji to zbiór

$$p^{-1}(y) = \{x \in X : p(x) = y\}$$

wszystkich punktów przechodzących na y .

W literaturze podobnego oznaczenia używa się dla przeciwobrazów podzbiorów Y , jednak tutaj ograniczymy się do przeciwobrazów punktów.

- Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X oznaczamy przez 2^X . *To tylko oznaczenie!* Niemniej prawdą jest, że $|2^X| = 2^{|X|}$ (tj. zbiór n -elementowy ma 2^n podzbiorów).
- Dla dwóch zbiorów A, B ich *różnica symetryczna* to

$$A \div B = \{x : x \in A \setminus B \text{ lub } x \in B \setminus A\}.$$

- Funkcję $p: 2^A \rightarrow 2^B$ nazwiemy *liniową*, jeśli

$$p(A_1 \div A_2) = p(A_1) \div p(A_2) \quad \text{dla } A_1, A_2 \subseteq A.$$

- Definiujemy *pierwszy operator brzegu* $\partial_1: 2^{\mathcal{E}} \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$:

$$\partial_1(X) = \{v \in \mathcal{V} : v \text{ jest końcem nieparzystej liczby krawędzi należących do } X\}$$

oraz *drugi operator brzegu* $\partial_2: 2^{\mathcal{F}} \rightarrow 2^{\mathcal{E}}$:

$$\partial_2(Y) = \{e \in \mathcal{E} : e \text{ jest krawędzią nieparzystej liczby ścian należących do } Y\}.$$

- Dla zadanej powierzchni definiujemy liczby Bettiego b_0, b_1, b_2 jako liczby spełniające

$$2^{b_0} = \frac{|2^{\mathcal{V}}|}{|\partial_1(2^{\mathcal{E}})|}, \quad 2^{b_1} = \frac{|\partial_1^{-1}(\emptyset)|}{|\partial_2(2^{\mathcal{F}})|}, \quad 2^{b_2} = |\partial_2^{-1}(\emptyset)|.$$

Jak się okaże, liczby te mierzą liczbę dziur odpowiedniego wymiaru (0, 1, 2).

Zadania

Zadanie 3.1. Przekonać się, że operacja różnicy symetrycznej zbiorów jest przemienne i łączna, to znaczy

$$A \div B = B \div A, \quad (A \div B) \div C = A \div (B \div C),$$

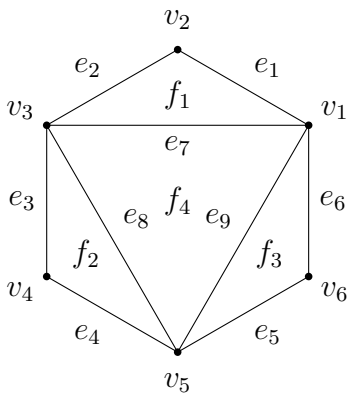
co pozwala bez ryzyka nieściśłości opuszczać nawiasy i pisać np. $A \div B \div C$.

Zadanie 3.2. Wykazać następującą charakteryzację różnicy symetrycznej wielu zbiorów:

$$A_1 \div A_2 \div \dots \div A_n = \left\{ x : x \text{ należy do nieparzystości} \right. \\ \left. \text{wielu zbiorów spośród } A_1, A_2, \dots, A_n \right\}.$$

Zadanie 3.3. Czym są brzegi $\partial_1(\{e\})$ i $\partial_2(\{f\})$ pojedynczej krawędzi lub ściany?

Zadanie 3.4.



Na przykładzie obok wyznaczyć brzegi

- $\partial_1(\{e_1\})$
- $\partial_2(\{f_4\})$
- $\partial_1(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\})$
- $\partial_2(\{f_1, f_2, f_4\})$

[W] **Zadanie 3.5.** Sprawdzić, że operatory brzegu $\partial_1: 2^{\mathcal{E}} \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$, $\partial_2: 2^{\mathcal{F}} \rightarrow 2^{\mathcal{E}}$ są liniowe.

Wskazówka. (liniowość ∂_1) Dla ustalonych zbiorów $X, Y \subseteq \mathcal{E}$ i wierzchołka $v \in \mathcal{V}$ porównać warunki $v \in \partial_1(X)$, $v \in \partial_1(Y)$ i $v \in \partial_1(X \div Y)$.

[W] **Zadanie 3.6.** Załóżmy, że $p: 2^A \rightarrow 2^B$ jest funkcją liniową. Uzasadnić, że p każdą swoją wartość przyjmuje tyle samo razy, a więc $|p^{-1}(\emptyset)|$ razy. Wywnioskować, że

$$|2^A| = |p(2^A)| \cdot |p^{-1}(\emptyset)|.$$

Wskazówka. Równość zbiorów $A_1 = A_2$ jest równoważna równości $A_1 \div A_2 = \emptyset$.

[W] **Zadanie 3.7.** Wyprowadzić wzór łączący liczby Bettiego z charakterystyką Eulera:

$$b_0 - b_1 + b_2 = V - E + F = \chi.$$

Wskazówka. Wykorzystać Zadanie 3.6 do zbadania wielkości $\frac{2^{b_0} \cdot 2^{b_2}}{2^{b_1}}$.

[W] **Zadanie 3.8.** Uzasadnić, że jeśli $p: 2^A \rightarrow 2^B$ jest funkcją liniową, to liczby $|p(2^A)|$ i $|p^{-1}(\emptyset)|$ są potęgami dwójki.

Wskazówka. Wykorzystać Zadanie 3.6.

Uwaga. Wynika stąd, że liczby Bettiego b_0, b_1, b_2 są całkowite.

[W] **Zadanie 3.9.** Przekonać się, że $\partial_1(\partial_2(\mathcal{F}')) = \emptyset$ dla dowolnego podzbioru $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$.

Wskazówka. Sprawdzić powyższy warunek dla zbioru jednoelementowego $\mathcal{F}' = \{f\}$, następnie oprzeć się na liniowości złożenia $\partial_1\partial_2$.

Uwaga. Wynika stąd, że liczby Bettiego b_0, b_1, b_2 (zwłaszcza b_1) są nieujemne.

[W] **Zadanie 3.10.** Wykazać, że jeśli \mathcal{M} jest spójną powierzchnią, to obraz $\partial_1(2^{\mathcal{E}})$ jest rodziną wszystkich parzystoelementowych podzbiorów $2^{\mathcal{V}}$. Wywnioskować, że $b_0(\mathcal{M}) = 1$.

Wskazówka. Jest jasne, że $\partial_1(\{e\})$ jest zbiorem dwuelementowym. Nietrudno też uzasadnić, że każdy dwuelementowy podzbiór \mathcal{V} jest brzegiem pewnego zbioru krawędzi (jakiego?). W ogólnym przypadku zastosować indukcję.

[W] **Zadanie 3.11.** Wykazać, że jeśli \mathcal{M} jest spójną powierzchnią bez brzegu, to funkcja ∂_2 przyjmuje wartość \emptyset dla dokładnie dwóch zbiorów: \emptyset oraz \mathcal{F} . Wywnioskować, że $b_2(\mathcal{M}) = 1$.

Wskazówka. Uzasadnić, że jeśli zbiór $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ zawiera jakąś ścianę i spełnia $\partial_2(\mathcal{F}') = \emptyset$ (czyli ma pusty brzeg), to zawiera też wszystkie ściany sąsiednie.

4 Homologie sympleksyjne powierzchni

Zadania

[W] **Zadanie 4.1.** Pokazać, że jeśli \mathcal{M} jest spójną powierzchnią bez brzegu, to jej charakterystyka Eulera $\chi_{\mathcal{M}} = V - E + F$ nie przekracza 2.

Wskazówka. Skorzystać z Zadania 3.7.

Zadanie 4.2. Wykazać, że powierzchnia \mathcal{M} ma krzywiznę ograniczoną z dołu przez $K > 0$, to jej pole powierzchni spełnia ograniczenie

$$|\mathcal{M}| \leq \frac{4\pi}{K}.$$

Wskazówka. Skorzystać z Zadań 1.7 i 4.1.

Zadanie 4.3. Jeśli \mathcal{M} jest spójną powierzchnią z brzegiem (jak np. koło lub wstęga Möbiusa), to $b_2(\mathcal{M}) = 0$.

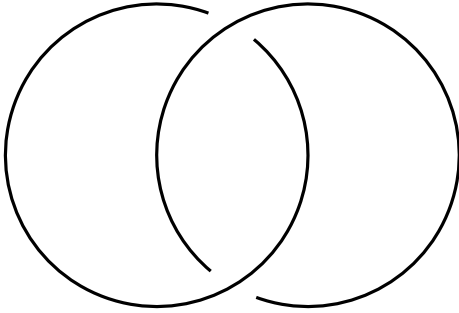
Wskazówka. Powtórzyć rozumowanie z Zadania 3.11. Z jedną drobną różnicą: czym jest $\partial_2(\mathcal{F})$?

Zadanie 4.4. Wyznaczyć liczby Bettiego n -precla:

$$b_0(P_n) = 1, \quad b_1(P_n) = 2n, \quad b_2(P_n) = 1.$$

Wskazówka. Skorzystać z wyników Zadań 2.2, 3.10 i 3.11.

Zadanie 4.5.



Przykład nietrywialnego splotu

(pierścienie Boromeuszy) Skonstruować trzy pętle A, B, C w przestrzeni trójwymiarowej spełniające następujące dwa warunki:

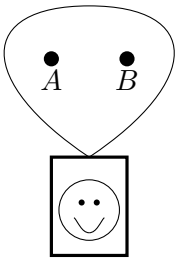
- tworzą nietrywialny spłot (tzn. np. pętli C nie można *wyjąć* na zewnątrz);
- każda para tworzy spłot trywialny (tzn. np. po usunięciu C pętle A i B można *rozdzielić*).

Zadanie 4.6. Niech A, B, C będą pętlami z poprzedniego zadania. Skonstruować powierzchnię rozpiętą na pętli C (tzn. mającą C jako swój brzeg), rozłączną z pętlami A i B .

Uwaga. Z warunku (a) wynika, że taka powierzchnia nie może mieć kształtu koła.

Wskazówka. Zacząć od koła rozłącznego z A i zmodyfikować je tak, by otrzymać powierzchnię rozłączną również z B .

Zadanie 4.7.



Przykład niewłaściwie zawieszono obrazu

W ścianę wbite są dwa gwoździe A i B . Używając pętli ze sznurka, chcemy powiesić na nich obraz, spełniając przy tym dwa warunki:

- póki oba gwoździe są w ścianie, obraz wisi;
- jeśli którykolwiek z gwoździ wypadnie ze ściany, obraz spada.

Wskazówka. Matematyczne jądro problemu jest takie samo jak w Zadaniu 4.5. Warto spróbować przenieść rozwiązanie jednego z tych zadań do drugiego.

5 Dalsza lektura

Odnośniki

- Główny wątek warsztatów jest oparty na moich dwóch artykułach w *Delcie*: [O trójkątach na sferze](#) oraz [O trójkątach \(nie tylko\) na sferze](#).

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/geometrie_nieeuklidesowe/2020/01/28/o-trojkatkach-na-sferze/

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/geometria_rozniczkowa/2020/02/27/o-trojkatkach-nie-tylko-na-sferze/

- Więcej o wzorze Eulera można przeczytać w *Delcie*. Artykuły Joanny Jaszukińskiej [W – K + S = 2](#) oraz [Domki i studnie](#) zawierają wiele pouczających a nietrudnych zadań. W artykule Witolda Sadowskiego [Wzór Eulera i balony](#) można za to przeczytać o twierdzeniu Gaussa-Bonneta, które łączy charakterystykę Eulera z krzywizną.

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/stereometria/2016/02/29/wzor_eulera/

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_grafow/2011/07/30/Domki_i_studnie/

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/2011/01/17/Wzor_Eulera_i_balony/

- Na kanałach 3Blue1Brown ([Why this puzzle is impossible](#)) i Vihart ([Four Utilities Puzzle \(and how to ruin a bagel\)](#)) można zobaczyć omówienie zadania z narysowaniem grafu $K_{3,3}$ na torusie (w formie kubka lub donuta).

<https://youtu.be/VvCytJvd4H0>

<https://youtu.be/CruQylWSfoU>

- Na stronie [Twenty-one Proofs of Euler's Formula: \$V - E + F = 2\$](#) można znaleźć 21 dowodów wzoru Eulera. Ten przedstawiony tutaj ma numer 9.

<https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>

- Polecam mój ulubiony dowód wzoru Eulera: jest on przedstawiony w artykule Jana Rempały [Jeszcze raz o wzorze Eulera, czyli zastosowanie stawów i grobli w stereometrii](#), jak również w filmie na kanale 3Blue1Brown [Euler's Formula and Graph Duality](#).

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/stereometria/2016/03/31/Jeszcze_raz_o_wzorze_Eulera_czy/

<https://youtu.be/-90Uyo8NFZg>

- Zastosowanie liczb Bettiego do zrozumienia struktury połączeń w mózgu ilustrują trzy filmy na kanale PBS Infinite Series [Simplicial Complexes – Your Brain as Math](#) (zwłaszcza część druga)

<https://youtu.be/M0M3srBoTkY> (część 1)

<https://youtu.be/r1I1K0o1gp4> (część 2)

<https://youtu.be/akgU8nRNip0> (część 3)

- Zainteresowanym tematyką topologii kombinatorycznej (czy też algebraicznej) polecam książkę Władimira Boltianskiego i Wadima Efremowicza [Intuitive Combinatorial Topology](#). Świetnym – ale już dużo bardziej zaawansowanym – źródłem jest książka Alana

Hatchera [Algebraic Topology](#), dostępna bezpłatnie na stronie autora.

<https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4757-5604-3>

<https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>

Wyjaśnienia terminologiczne i nie tylko

– *Topologia kombinatoryczna* to historyczna nazwa tej dyscypliny, wskazująca na użycie metod kombinatorycznych. Obecnie używa się nazwy *topologia algebraiczna*.

– Podana tu charakteryzacja krzywizny powierzchni przez sumę kątów w trójkącie rzeczywiście daje poprawną definicję, równoważną standardowej. Zazwyczaj jednak krzywiznę (Gaussa) definiuje się inaczej, a wzór na sumę kątów jest częścią twierdzenia Gaussa-Bonneta.

– W co najmniej jednym miejscu (przy problemie grafu $K_{3,3}$) milcząco powołaliśmy się na twierdzenie Jordana: każda krzywa zamknięta bez samoprzecięć dzieli płaszczyznę na dokładnie dwa obszary (analogicznie jest dla krzywych na sferze). To ciekawe twierdzenie – potrzebę jego zastosowania łatwo przeoczyć, ale samo twierdzenie już nie jest takie łatwe.

– Obiekt, który tutaj nazywałem trójkątną siatką lub triangulacją (zresztą bez podania ścisłej definicji), w literaturze odpowiada kompleksowi sympleksjalnemu lub Δ -kompleksowi. Aby taki kompleks opisywał powierzchnię, należy zadać pewne dodatkowe warunki: każda krawędź musi należeć do jednej lub dwóch ścian, a ściany stykające się w jednym wierzchołku muszą układać się w cykl kolejnych sąsiadujących ścian.

– Podzbiory zbioru $A \subseteq X$ odpowiadają jednoznacznie funkcjom $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ (kładziemy $f(x) = 1$ dla $x \in A$ i $f(x) = 0$ wpp.). Jeśli umówimy się, że liczby 0, 1 dodajemy i mnożymy modulo 2 (zbiór $\{0, 1\}$ z tymi działaniami przyjęło się oznaczać przez \mathbb{Z}_2), to funkcje $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ tworzą przestrzeń liniową nad \mathbb{Z}_2 . Operacja różnicy symetrycznej dwóch zbiorów $A_1 \div A_2$ odpowiada przy tym sumie odpowiednich funkcji $f_1 + f_2$.

– Czym są homologie? Jak się przekonaliśmy, zachodzi zawieranie $\partial_2(\mathcal{F}) \subseteq \partial_1^{-1}(\emptyset)$. Pierwszą grupę homologii otrzymujemy, biorąc zbiór $\partial_1^{-1}(\emptyset)$ i utożsamiając elementy różniące się o coś z $\partial_2(\mathcal{F})$, czyli $A \sim B \iff A \div B \in \partial_2(\mathcal{F})$. *Pierwsza* odnosi się do tego, że krawędzie mają wymiar 1, podobną konstrukcję można przeprowadzić dla ścian etc.

W terminach przestrzeni funkcji $f: 2^{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ powiedzielibyśmy, że zachodzi zawieranie $\text{im } \partial_2 \subseteq \ker \partial_1$ między obrazem ∂_2 a jądrem ∂_1 (to jest terminologia używana dla funkcji liniowych). W języku technicznym konstrukcja wyżej opisuje przestrzeń ilorazową $\ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$. Liczba Bettiego b_1 jest wtedy po prostu wymiarem tej przestrzeni ilorazowej.

– W miejsce \mathbb{Z}_2 można wybrać inne współczynniki – popularnym wyborem są liczby całkowite \mathbb{Z} lub rzeczywiste \mathbb{R} . Odrobinę więcej uwagi wymaga wtedy określenie operatorów brzegu. Standardowa definicja liczb Bettiego $b_i = \dim_{\mathbb{R}} \ker \partial_i / \text{im } \partial_{i+1}$ korzysta ze współczynników w \mathbb{R} , co różni się od użytych tutaj liczb b_i określonych dla \mathbb{Z}_2 (jako przykład warto rozważyć płaszczyznę rzutową).

– Liczba Bettiego b_1 w pewnym sensie zlicza nieściągalne pętle, ale z jednym zastrzeżeniem, które dobrze ilustrują pierścienie Boromeuszy. Otóż pętla jest ściągalna, gdy da się na niej rozciąć koło; równoważnie, jeśli jest brzegiem pewnego koła. Tymczasem (w opisie wyżej) wkładu w b_1 nie mają pętle będące brzegami dowolnych powierzchni. Różnicę między tymi dwoma warunkami opisuje ściśle twierdzenie Hurewicza: pierwsza grupa homologii jest abelianizacją grupy pętli. Niestety, samo wyjaśnienie tych terminów zajęłoby trochę czasu.